Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования

Пермский национальный исследовательский политехнический университет

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по образовательной деятельности
__________ А.Б. Петроченков
« 02 » марта 20 23 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Дисциплина: Дискретная математика
(наименование)

Форма обучения: очная
(очная/очно-заочная/заочная)

Уровень высшего образования: бакалавриат
(бакалавриат/специалитет/магистратура)

Общая трудоёмкость: 144 (4)
(часы (ЗЕ))

Направление подготовки: 15.03.04 Автоматизация технологических процессов и производств
(код и наименование направления)

Направленность: Автоматизация химико-технологических процессов и производств (СУОС)
(наименование образовательной программы)

Пермь 2023

1. Общие положения

1.1. Цели и задачи дисциплины

Цель: знакомство с математическим аппаратом, применяемым при изучении предметов профессионального цикла.

1.2. Изучаемые объекты дисциплины

Система, математическая модель, интегральные преобразования, передаточные функции, схемы из функциональных элементов, комбинационные схемы, графы, конечные автоматы.

1.3. Входные требования

Не предусмотрены

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине

Компетенция	Индекс индикатора	Планируемые результаты обучения по дисциплине (знать, уметь, владеть)	Индикатор достижения компетенции, с которым соотнесены планируемые результаты обучения	Средства оценки
ПК-1.1	ИД-1ПК-1.1	Знает применительно к области автоматизации технологических процессов и производств: цели и задачи проводимых исследований и разработок; методы анализа и обобщения отечественного и международного опыта; методы и средства планирования и организации исследований и разработок; методы проведения экспериментов и наблюдений, обобщения и обработки информации.	Знает применительно к области автоматизации технологических процессов и производств: цели и задачи проводимых исследований и разработок; методы анализа и обобщения отечественного и международного опыта; методы и средства планирования и организации исследований и разработок; методы проведения экспериментов и наблюдений, обобщения и обработки информации	Экзамен
ПК-1.1	ИД-2ПК-1.1	Умеет выполнять действия в области автоматизации технологических процессов и производств в сфере дискретных автоматов и преобразования измерительной информации.	Умеет выполнять действия в области автоматизации технологических процессов и производств: применять нормативную документацию; оформлять результаты научно-исследовательских и опытно-конструкторских работ; применять методы анализа научно-технической информации	Контрольная работа

Компетенция	Индекс индикатора	Планируемые результаты обучения по дисциплине (знать, уметь, владеть)	Индикатор достижения компетенции, с которым соотнесены планируемые результаты обучения	Средства оценки
ПК-1.1	ИД-3ПК-1.1	Владеет навыками выполнения трудовых действий в области автоматизации технологических процессов и производств: сбора, обработки, анализа и обобщения передового отечественного и международного опыта, результатов экспериментов и исследований.	Владеет навыками выполнения трудовых действий в области автоматизации технологических процессов и производств: проведения маркетинговых исследований научно-технической информации; сбора, обработки, анализа и обобщения передового отечественного и международного опыта, результатов экспериментов и исследований; внедрения результатов исследований и разработок в соответствии с установленными полномочиями	Расчетно-графическая работа

3. Объем и виды учебной работы

Вид учебной работы	Всего часов	Распределение по семестрам в часах
		Номер семестра
		5
1. Проведение учебных занятий (включая проведение текущего контроля успеваемости) в форме: 1.1. Контактная аудиторная работа, из них:	54	54
- лекции (Л)	18	18
- лабораторные работы (ЛР)		
- практические занятия, семинары и (или) другие виды занятий семинарского типа (ПЗ)	34	34
- контроль самостоятельной работы (КСР)	2	2
- контрольная работа		
1.2. Самостоятельная работа студентов (СРС)	54	54
2. Промежуточная аттестация		
Экзамен	36	36
Дифференцированный зачет		
Зачет		
Курсовой проект (КП)		
Курсовая работа (КР)		
Общая трудоемкость дисциплины	144	144

4. Содержание дисциплины

Наименование разделов дисциплины с кратким содержанием	Объем аудиторных занятий по видам в часах			Объем внеаудиторных занятий по видам в часах
	Л	ЛР	ПЗ	СРС
5-й семестр				
Операционное исчисление	6	0	12	20
Преобразование Лапласа и его свойства. Решение дифференциальных уравнений и систем операционным методом.				
Булева алгебра	6	0	12	20
Основные понятия теории множеств. Операции над множествами. Логические функции. Операции над логическими функциями. Дизъюнктивные и конъюнктивные нормальные формы и их минимизация. Схемы из функциональных элементов, комбинационные схемы.				
Основы теории графов	3	0	5	7
Граф. Виды графов. Матрицы смежности, инцидентности. Понятие алгоритма теории графов. Алгоритм нахождения кратчайшего пути на графе.				
Конечные автоматы	3	0	5	7
Конечный автомат. Автоматы-распознаватели и автоматы-преобразователи.				
ИТОГО по 5-му семестру	18	0	34	54
ИТОГО по дисциплине	18	0	34	54

Тематика примерных практических занятий

№ п.п.	**Наименование темы практического (семинарского) занятия**
1	Комплексные числа и действия над ними
2	Функции комплексного переменного.
3	Преобразование Лапласа и его свойства.
4	Нахождение оригиналов по заданным изображениям.
5	Решение дифференциальных уравнений операционным методом.
6	Решение систем дифференциальных уравнений операционным методом.
7	Множества. Операции над множествами.
8	Основные логические функции.
9	Совершенные дизъюнктивная и конъюнктивная нормальные формы, их минимизация.
10	Полиномиальная нормальная форма. Полные системы функций.

№ п.п.	Наименование темы практического (семинарского) занятия
11	Анализ и синтез схем из функциональных элементов.
12	Комбинационные схемы.
13	Основные понятия теории графов. Матрицы смежности, инцидентности.
14	Обход графа. Кратчайший путь на графе.
15	Основные понятия теории автоматов.
16	Синтез конечных автоматов.
17	Зачетное занятие

5. Организационно-педагогические условия

5.1. Образовательные технологии, используемые для формирования компетенций

Проведение лекционных занятий по дисциплине основывается на активном методе обучения, при котором учащиеся не пассивные слушатели, а активные участники занятия, отвечающие на вопросы преподавателя. Вопросы преподавателя нацелены на активизацию процессов усвоения материала, а также на развитие логического мышления. Преподаватель заранее намечает список вопросов, стимулирующих ассоциативное мышление и установление связей с ранее освоенным материалом.

Проведение практических занятий основывается на интерактивном методе обучения, при котором обучающиеся взаимодействуют не только с преподавателем, но и друг с другом. При этом доминирует активность учащихся в процессе обучения. Место преподавателя в интерактивных занятиях сводится к направлению деятельности обучающихся на достижение целей занятия.

При проведении учебных занятий используются интерактивные лекции, групповые дискуссии, ролевые игры, тренинги и анализ ситуаций и имитационных моделей.

5.2. Методические указания для обучающихся по изучению дисциплины

При изучении дисциплины обучающимся целесообразно выполнять следующие рекомендации:

1. Изучение учебной дисциплины должно вестись систематически.
2. После изучения какого-либо раздела по учебнику или конспектным материалам рекомендуется по памяти воспроизвести основные термины, определения, понятия раздела.
3. Особое внимание следует уделить выполнению отчетов по расчетно-графическим работам и индивидуальным комплексным заданиям на самостоятельную работу.
4. Вся тематика вопросов, изучаемых самостоятельно, задается на лекциях преподавателем. Им же даются источники (в первую очередь вновь изданные в периодической научной литературе) для более детального понимания вопросов, озвученных на лекции.

6. Перечень учебно-методического и информационного обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

6.1. Печатная учебно-методическая литература

№ п/п	Библиографическое описание (автор, заглавие, вид издания, место, издательство, год издания, количество страниц)	Количество экземпляров в библиотеке

№ п/п	Библиографическое описание (автор, заглавие, вид издания, место, издательство, год издания, количество страниц)	Количество экземпляров в библиотеке
1. Основная литература		
1	Акимов О. Е. Дискретная математика: логика, группы, графы : учебное издание для вузов. Москва : Лаб. Базовых Знаний, 2001. 349 с.	5
2	Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И. Операционное исчисление. Теория устойчивости : задачи и примеры с подробными решениями учебное пособие для втузов. 5-е изд. Москва : Либроком, 2013. 175 с.	80
3	Шапорев С. Д. Дискретная математика : курс лекций и практических занятий учебное пособие для вузов. Санкт-Петербург : БХВ-Петербург, 2007. 396 с.	30
2. Дополнительная литература		
2.1. Учебные и научные издания		
1	Акимов О. Е. Дискретная математика: логика, группы, графы, фракталы : учебное пособие. Москва : Изд. Акимова, 2005. 655 с.	10
2	Королев Л. Н., Миков А. И. Информатика. Введение в компьютерные науки : учебник для вузов. Москва : Высш. шк., 2003. 341 с.	3
3	Чудесенко В.Ф. Сборник заданий по специальным курсам высшей математики. Типовые расчеты : учебное пособие. 4-е изд., стер. Санкт-Петербург : Лань, 2007. 191 с.	110
4	Шалыто А. А. Switch-технология. Алгоритмизация и программирование задач логического управления. Санкт-Петербург : Наука, 1998. 627 с. 39,5 усл. печ. л.	1
5	Шалыто А. А. Логическое управление. Методы аппаратной и программной реализации алгоритмов. Санкт-Петербург : Наука, 2000. 780 с.	1
2.2. Периодические издания		
	Не используется	
2.3. Нормативно-технические издания		
	Не используется	
3. Методические указания для студентов по освоению дисциплины		
	Не используется	
4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студента		
	Не используется	

6.2. Электронная учебно-методическая литература

Вид литературы	Наименование разработки	Ссылка на информационный ресурс	Доступность (сеть Интернет / локальная сеть; авторизованный / свободный доступ)
Дополнительная литература	Акимов О. Е. Дискретная математика: логика, группы, графы, фракталы : учебное пособие / О. Е. Акимов. - Москва: Изд. Акимова, 2005.	http://elib.pstu.ru/Record/RUPNRPUelib7226	локальная сеть; авторизованный доступ
Дополнительная литература	Викентьева О. Л. Дискретная математика : учебное пособие / О. Л. Викентьева, А. Е. Соловьев, Р. А. Файзрахманов. - Пермь: Изд-во ПГТУ, 2009.	http://elib.pstu.ru/Record/RUPNRPUelib2928	локальная сеть; авторизованный доступ

6.3. Лицензионное и свободно распространяемое программное обеспечение, используемое при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

Вид ПО	Наименование ПО
Операционные системы	Windows 10 (подп. Azure Dev Tools for Teaching)
Операционные системы	Windows 10 (подп. Azure Dev Tools for Teaching)
Прикладное программное обеспечение общего назначения	Dr.Web Enterprise Security Suite, 3000 лиц, ПНИПУ ОЦНИТ 2017
Прикладное программное обеспечение общего назначения	MATLAB 7.9 + Simulink 7.4 Academic, ПНИПУ 2009 г.
Прикладное программное обеспечение общего назначения	Microsoft Office Visio Professional 2016 (подп. Azure Dev Tools for Teaching)
Прикладное программное обеспечение общего назначения	Microsoft Office Visio Professional 2016 (подп. Azure Dev Tools for Teaching)

6.4. Современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

Наименование	Ссылка на информационный ресурс
База данных научной электронной библиотеки (eLIBRARY.RU)	https://elibrary.ru/
Научная библиотека Пермского национального исследовательского политехнического университета	http://lib.pstu.ru/
Электронно-библиотечеая система Лань	https://e.lanbook.com/
Электронно-библиотечная система IPRbooks	http://www.iprbookshop.ru/

Наименование	Ссылка на информационный ресурс
Информационные ресурсы Сети КонсультантПлюс	http://www.consultant.ru/

7. Материально-техническое обеспечение образовательного процесса по дисциплине

Вид занятий	Наименование необходимого основного оборудования и технических средств обучения	Количество единиц
Лекция	Мультимедиа комплекс (проектор, экран, ноутбук), доска, парты, стол преподавателя	1
Практическое занятие	Проектор, экран настенный; маркерная доска, компьютерные столы (10 шт.), персональные компьютеры (10 шт.)	1

8. Фонд оценочных средств дисциплины

Описан в отдельном документе

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Пермский национальный исследовательский политехнический университет»

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ
для проведения промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине «Дискретная математика»
Приложение к рабочей программе дисциплины

Направление подготовки:	15.03.04 – Автоматизация технологических процессов и производств
Направленность (профиль) образовательной программы:	Промышленная автоматизация в нефтегазопереработке и химической технологии
Квалификация выпускника:	бакалавр
Выпускающая кафедра:	Оборудование и автоматизация химических производств
Форма обучения:	очная

Курс: 3 **Семестр**: 5

Трудоѐмкость:
Кредитов по рабочему учебному плану: 4 ЗЕ
Часов по рабочему учебному плану: 144 ч.

Форма промежуточной аттестации:
Экзамен: 5 семестр

Пермь 2022

Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации обучающихся для проведения промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине является частью (приложением) к рабочей программе дисциплины. Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине разработан в соответствии с общей частью фонда оценочных средств для проведения промежуточной аттестации основной образовательной программы, которая устанавливает систему оценивания результатов промежуточной аттестации и критерии выставления оценок**.** Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине устанавливает формы и процедуры текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине.

1. Перечень контролируемых результатов обучения по дисциплине, объекты оценивания и виды контроля

Согласно РПД освоение учебного материала дисциплины запланировано в течение одного семестра (5-го семестра учебного плана) и разбито на 3 учебных модуля. В каждом модуле предусмотрены аудиторные лекционные и практические занятия, а также самостоятельная работа студентов. В рамках освоения учебного материала дисциплины формируется компоненты компетенций *знать, уметь, владеть,* указанные в РПД, которые выступают в качестве контролируемых результатов обучения по дисциплине (табл. 1.1).

Контроль уровня усвоенных знаний, освоенных умений и приобретенных владений осуществляется в рамках текущего, рубежного и промежуточного контроля при изучении теоретического материала, сдаче отчетов по лабораторным работам, курсовой работы и дифференциального зачета. Виды контроля сведены в таблицу 1.1.

Таблица 1.1. Перечень контролируемых результатов обучения по дисциплине

Контролируемые результаты обучения по дисциплине (ЗУВы)	**Вид контроля**				
	Текущий		**Рубежный**		**Итоговый**
	С	**ТО**	**РГР**	**Т/КР**	**Экзамен**
Усвоенные знания					
З.1 знать основные понятия операционного исчисления, способы построения изображений	+	+			ТВ
З.2 знать способы построения схемы из функциональных элементов по известным сигналам входа и выхода	+	+			ТВ
З.3. знать основные понятия теории автоматов, способы построения конечного автомата	+	+			ТВ
Освоенные умения					
У.1 уметь найти решение дифференциального уравнения и системы дифференциальных уравнений операционным методом			+	+	ПЗ
У.2 уметь провести анализ, синтез, оптимизацию схемы из функциональных элементов			+	+	ПЗ

У.3. уметь провести синтез и тестирование конечного автомата			+	+	ПЗ
Приобретенные владения					
В.1 владеть основными приемами операционного метода.			+	+	КЗ
В.2 владеть основными методами теории множеств, булевой алгебры			+	+	КЗ
В.3 владеть методами построения конечных автоматов			+	+	КЗ

С – собеседование по теме; ТО – коллоквиум (теоретический опрос); КЗ – кейс-задача (индивидуальное задание); РГР – защита расчетно-графической работы; Т/КР – рубежное тестирование (контрольная работа); ТВ – теоретический вопрос; ПЗ – практическое задание; КЗ – комплексное задание экзамена.

Итоговой оценкой достижения результатов обучения по дисциплине является промежуточная аттестация в виде экзамена, проводимая с учетом результатов текущего и рубежного контроля.

1. Виды контроля, типовые контрольные задания и шкалы оценивания результатов обучения

Текущий контроль успеваемости имеет целью обеспечение максимальной эффективности учебного процесса, управление процессом формирования заданных компетенций обучаемых, повышение мотивации к учебе и предусматривает оценивание хода освоения дисциплины. В соответствии с Положением о проведении текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся по образовательным программам высшего образования – программам бакалавриата, специалитета и магистратуры в ПНИПУ предусмотрены следующие виды и периодичность текущего контроля успеваемости обучающихся:

- входной контроль, проверка исходного уровня подготовленности обучаемого и его соответствия предъявляемым требованиям для изучения данной дисциплины;
- текущий контроль усвоения материала (уровня освоения компонента «знать» заданных компетенций) на каждом групповом занятии и контроль посещаемости лекционных занятий;
- промежуточный и рубежный контроль освоения обучаемыми отдельных компонентов «знать», «уметь» заданных компетенций путем компьютерного или бланочного тестирования, контрольных опросов, контрольных работ (индивидуальных домашних заданий), защиты отчетов по лабораторным работам, рефератов, эссе и т.д.

Рубежный контроль по дисциплине проводится на следующей неделе после прохождения модуля дисциплины, а промежуточный – во время каждого контрольного мероприятия внутри модулей дисциплины;

- межсессионная аттестация, единовременное подведение итогов текущей успеваемости не менее одного раза в семестр по всем дисциплинам для каждого направления подготовки (специальности), курса, группы;
- контроль остаточных знаний.

2.1. Текущий контроль усвоения материала

Текущий контроль усвоения материала в форме собеседования или выборочного теоретического опроса студентов проводится по каждой теме. Результаты по 4-балльной шкале оценивания заносятся в книжку преподавателя и учитываются в виде интегральной оценки при проведении промежуточной аттестации.

2.2. Рубежный контроль

Рубежный контроль для комплексного оценивания усвоенных знаний, освоенных умений и приобретенных владений (табл. 1.1) проводится в форме защиты расчетно-графических работ и рубежных контрольных работ (после изучения каждого модуля учебной дисциплины).

2.2.1. Защита расчетно-графических работ

Согласно РПД, всего запланировано 3 расчетно-графические работы.

Типовые темы РГР:

Типовая тема РГР 1: Операционное исчисление.

Типовая тема РГР 2: Булева алгебра. Комбинационные схемы.

Типовая тема РГР 3 (индивидуальное задание): Применение конечных автоматов в задачах автоматического управления.

Защита расчетно-графической работы проводится индивидуально каждымстудентом или группой студентов.

Шкала и критерии оценки приведены в таблице 2.1.

Таблица 2.1. Шкала и критерии оценки защиты расчетно-графической работы

Балл	**Уровень освоения**	**Критерии оценивания уровня освоения учебного материала**
5	Максимальный уровень	*Задание расчетно-графической работы выполнено в полном объе Студент точно ответил на контрольные вопросы, свобо ориентируется в предложенном решении, может его модифицирова при изменении условия задачи. Отчет выполнен аккуратно и соответствии с предъявляемыми требованиями.*
4	Средний уровень	*Задание расчетно-графической работы выполнено в полном объе Студент ответил на теоретические вопросы, испытывая неболь затруднения. Качество оформления расчетно-графической работы полностью соответствует требованиям*
3	Минимальный уровень	*Студент правильно выполнил задание расчетно-графической рабо Оформил решение в установленной форме, представил реше большинства заданий, предусмотренных в расчетно-графичес работе. Студент не может полностью объяснить полученн результаты.*
2	Минимальный уровень не достигнут	*Студент не выполнил все задания расчетно-графической работы и может объяснить полученные результаты.*

Результаты защиты расчетно-графических работ по 4-балльной шкале оценивания заносятся в книжку преподавателя и учитываются в виде интегральной оценки при проведении промежуточной аттестации.

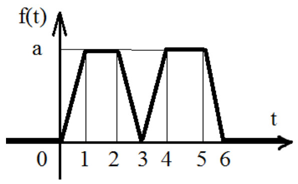
2.2.2. Рубежная контрольная работа

Согласно РПД запланины контрольная работа (КР) после освоения студентами учебных модулей дисциплины.

Типовые задания КР:

Типовые задания КР 1:

1. Найти преобразование Лапласа сигналов, изображенных на рисунке



2. Найти обратное преобразование Лапласа от выражения $F(p)=\dfrac{4p^2-7p+2}{(p+2)(p-1)p}$.

3 С помощью операционного метода найти решение задачи Коши

$x''(t)+3x'(t)-10x(t)=3e^{-t},\ x(0)=2,\ x'(0)=6$.

4. Операционным методом решить неоднородное матричное дифференциальное уравнение $\dot{x}(t)+Ax(t)=Bu(t)$, $A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}$, $u(t)=\begin{pmatrix}e^t\\e^t\end{pmatrix}$; $x(0)=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

Типовые задания КР 2:

1. Упростите выражение $\big((c\vee\bar{a})\wedge(\bar{a}\vee\bar{b})\wedge(a\vee c)\wedge(\bar{b}\vee a)\big)\vee(b\wedge\bar{d})\vee(b\wedge d)$.
2. Постройте СДНФ функции $f=(10001001)$, заданной вектором своих значений. С помощью законов булевой алгебры получите ДНФ. Постройте соответствующую схему из функциональных элементов.
3. На входы схемы подаются двоичные уровни напряжения, низкие (0) или высокие (1), снимаемые с выходов триггеров . Выходы триггеров являются парафазными, то есть каждый триггер имеет прямой и инверсный выходы: a и $\bar{a}$, b и $\bar{b}$, c и $\bar{c}$, d и $\bar{d}$. Выход схемы обозначается буквой f. Сигнал на выходе принимает единичное значение следующих условиях: 1) триггеры b и c находятся в состояниях единицы, а триггеры a и d – в состояниях нуля; 2) триггеры b и d находятся в состояниях нуля; 3) состояния триггеров b и c нулевые; 4) $a=0$, $b=d=1$; 5) триггеры b, c и d находятся в состояниях единицы; 6) $a=d=1$, $b=0$. Постройте СДНФ функции f и минимизируйте ее с помощью карт Карно. Постройте соответствующую комбинационную схему.

Типовые задания КР 3:

1. Постройте автомат распознавания в двоичных словах фрагментов вида 11 и 1101. Факт обнаружения каждого фрагмента 11 следует подтвердить выдачей символа 0. Факт обнаружения фрагмента 1101 – выдачей символа 1.
2. Постройте автомат, определяющий четность входного двоичного числа. Постройте граф полученного автомата. Проведите тестирование.
3. Постройте элементарный автомат памяти – автомат задержки на 1 такт.

Шкала и критерии оценки результатов рубежной контрольной работы приведены в таблице 2.2.

Таблица 2.2. Шкала и критерии оценки результатов рубежной контрольной работы

Балл	**Уровень освоения**	**Критерии оценивания уровня освоения учебного моду**
5	Максимальный уровень	*Студент полностью выполнил задание контроль работы, показал отличные знания и умения в рам усвоенного учебного материала. Отчет по контроль работе оформлен аккуратно и в соответствии предъявляемыми требованиями.*
4	Средний уровень	*Студент полностью выполнил задание контроль работы, показал хорошие знания и умения, но не сл обосновать оптимальность предложенного решения, ес недостатки в оформлении контрольной работы.*
3	Минимальный уровень	*Студент полностью выполнил задание контроль работы, но допустил существенные неточности, проявил умения правильно интерпретировать полученн результаты, отчет по контрольной работе име недостаточный уровень качества оформления.*

2	Минимальный уровень не достигнут	*Студент не полностью выполнил задание контрольн работы, при этом проявил недостаточный уровень зна и умений, а также неспособен пояснить полученн результат.*

Результаты рубежных контрольных работ по 4-балльной шкале оценивания заносятся в книжкупреподавателя и учитываются в виде интегральной оценки при проведении промежуточной аттестации.

2.3. Промежуточная аттестация (итоговый контроль)

Допуск к промежуточной аттестации осуществляется по результатам текущего и рубежного контроля. Условиями допуска являются успешная сдача всех лабораторных работ и положительная интегральная оценка по результатам текущего и рубежного контроля.

Промежуточная аттестация, согласно РПД, проводится в виде экзамена по дисциплине устно по билетам. Билет содержит теоретические вопросы (ТВ) для контроля знаний, практические задания (ПЗ) для контроля умений и комплексные задания (КЗ) для контроля уровня приобретенных владений всех заявленных компетенций.

Билет формируется таким образом, чтобы в него попали вопросы и практические задания, контролирующие уровень сформированности всех заявленных компетенций. Форма билета представлена в общей части ФОС образовательной программы.

2.3.1. Типовые вопросы и задания для экзамена по дисциплине

Типовые вопросы для контроля усвоенных знаний:

1. Преобразование Лапласа. Функция-оригинал. Изображение.
2. Теорема смещения. Теорема подобия.
3. Изображение экспоненциальной функции. Изображение гиперболических функций.
4. Теорема о дифференцировании оригинала. Изображение производных.
5. Теорема умножения изображений. Свертка функций.
6. Интеграл Дюамеля.
7. Множество. Мощность бесконечного множества. Счетные множества.
8. Основные логические функции. Таблицы истинности, диаграммы Эйлера-Венна.
9. Алгоритм построения СДНФ, СКНФ, ПНФ логической функции.

10\. Методы минимизации СДНФ.
10\. Типы конечных автоматов.

11. Автоматные функции и их реализация.

Типовые задания для контроля приобретенных умений:

1. Решить дифференциальное уравнение операционным методом
2. Выполнить действия над множествами.
3. Доказать логическое тождество.
4. Проанализировать предложенную комбинационную схему.
5. Построить схему из функциональных элементов.
6. Построить конечный автомат с заданными свойствами.

Типовые комплексные задания для контроля приобретенных владений:

1. Для заданной простейшей физической задачи постройте математическую модель и исследуйте ее с помощью операционного метода:
   Материальная точка массы 2 грамма движется прямолинейно под действием силы F, возрастающей на a дин в секунду. В момент t = 0 точка находилась в начале координат и имела скорость v_0 = 10 см/сек. Зная, что на расстоянии 450 см от начала координат скорость v = 105 см/сек, определите значение величины a.
2. Дифференциальное уравнение для систем автоматического управления в классической форме записи имеет вид $a_n y^{(n)}(t) + ... + a_0 y(t) = b_m x^{(m)}(t) + ... + b_0 x(t)$. Запишите это уравнение в операторной форме при нулевых начальных условиях.
3. Дано в общей форме апериодическое дифференциальное уравнение с постоянными параметрами $a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_0 x(t)$. Найдите операционным методом решение уравнения при следующих условиях: $x(t) = e^{-t}$, $y(0) = y_0$.
4. Укажите, как различаются мощности множеств, применяемых при построении дискретных и непрерывных математических моделей.
5. В пролете двухэтажного дома установлена лампочка. Постройте комбинационную схему, позволяющую включать и выключать лампочку на каждом этаже.
6. Приведите описание элементарного автомата, реализующего булевы функции (конъюнкцию, дизъюнкцию, отрицание).
7. Оператор наблюдает за движением колонны цистерн. В каждой цистерне установлен датчик, который передает на пульт оператора сигнал 1, если он находится выше уровня жидкости. Постройте автомат, который на пульте включает сигнал, привлекающий внимание оператора в случае
   нештатных ситуаций вида "наклон цистерны превысил допустимый" и "в цистерне обнаружилась течь". Определите,

где в цистерне должны быть установлены датчики и их оптимальное количество.

8. Постройте автомат для формирования упорядоченной последовательности деталей, поступающих из общего бункера, в котором имеется в неограниченном виде два вида деталей *А, В.* Требуется формировать последовательные блоки деталей: *ААВВ, ААВВ, ...* .

Полный перечень теоретических вопросов и практических заданий в форме утвержденного комплекта экзаменационных билетов хранится на выпускающей кафедре.

2.3.2. Шкалы оценивания результатов обучения на экзамене

Оценка результатов обучения по дисциплине в форме уровня сформированности компонентов *знать, уметь, владеть* заявленных компетенций проводится по 4-х балльной шкале оценивания путем выборочного контроля во время экзамена.

Типовые шкала и критерии оценки результатов обучения при сдаче экзамена для компонентов *знать, уметь и владеть* приведены в общей части ФОС образовательной программы.

3. Критерии оценивания уровня сформированности компонентов и компетенций

3.1. Оценка уровня сформированности компонентов компетенций

При оценке уровня сформированности компетенций в рамках выборочного контроля при экзамене считается, что *полученная оценка за компонент проверяемой в билете компетенции обобщается на соответствующий компонент всех компетенций, формируемых в рамках данной учебной дисциплины*.

Типовые критерии и шкалы оценивания уровня сформированности компонентов компетенций приведены в общей части ФОС образовательной программы.

3.2. Оценка уровня сформированности компетенций

Общая оценка уровня сформированности всех компетенций проводится путем агрегирования оценок, полученных студентом за каждый компонент формируемых компетенций, с учетом результатов текущего и рубежного контроля в виде интегральной оценки по 4-х балльной шкале. Все результаты контроля заносятся в оценочный лист и заполняются преподавателем по итогам промежуточной аттестации.

Форма оценочного листа и требования к его заполнению приведены в общей части ФОС образовательной программы.

При формировании итоговой оценки промежуточной аттестации в виде экзамена используются типовые критерии, приведенные в общей части ФОС образовательной программы.

Планы лекций

Лекция 1.
Тема: Операционное исчисление. Основные понятия и определения.
1. Определение функции-оригинала.
2. Определение изображения по Лапласу.
3. Теорема о единственности нахождения оригинала по заданному изображению.
4. Примеры. Изображение функции Хевисайда. Изображения функций $x(t)=t$, $x(t)=\sin t$, $x(t)=\cos t$.
5. Свойство линейности преобразования Лапласа.

Лекция 2.
Тема: Основные свойства преобразования Лапласа.
1. Изображений функций
2. Теорема подобия. Изображение функций $x(t)=\sin at$, $x(t)=\cos at$.
3. Теорема смещения изображения. Изображение функций $x(t) = e^{-bt}$, $x(t) = sh\,bt$, $x(t) = ch\,bt$, $x(t) = e^{-at}\sin bt$, $x(t) = e^{-at}\cos bt$.
4. Теорема смещения оригинала. Изображение кусочно-линейной функции.

Лекция 3.
Тема: Основные свойства преобразования Лапласа.
1. Теорема дифференцирования оригинала. Изображение производных.
2. Дифференцирование изображения.
3. Интегрирование оригинала.
4. Интегрирование изображения.
5. Примеры.
6. Умножение изображений. Свертка оригиналов.

Лекция 4.
Тема: Применение операционного исчисления к решению дифференциальных уравнений и систем.
1. Решение дифференциальных уравнений операционным методом. Примеры.
2. Интеграл Дюамеля. Пример.
3. Решение систем дифференциальных уравнений операционным методом. Примеры.

Практические занятия

Практическое занятие 1.

Тема: Комплексные числа. Формы представления комплексных чисел. Действия с комплексными числами.

Цель занятия: систематизация и дополнение представления о комплексных числах.

1. Алгебраическая форма записи комплексных чисел. Действия с комплексными числами, заданными в алгебраической форме.
2. Геометрическая интерпретация комплексного числа. Модуль и аргумент комплексного числа. Главное значение аргумента.
3. Тригонометрическая форма записи комплексного числа. Формулы перехода от алгебраической к тригонометрической форме записи и обратно.
4. Показательная форма записи комплексного числа. Формула Эйлера. Действия с числами, заданными в показательной форме.
5. Корень из комплексного числа. Корни из 1.

Конспект занятия.

1. Алгебраическая форма записи комплексного числа: $z = x + iy$.

Здесь $z \in C$, $\operatorname{Re} z = x$, $\operatorname{Im} z = y$, i – мнимая единица, $i^2 = -1$.

C – обозначение множества комплексных чисел, $\operatorname{Re} z$ – обозначение действительной (real) части комплексного числа, $\operatorname{Im} z$ – обозначение мнимой (imaginary) части комплексного числа.

Пример: $\operatorname{Re}(2-3i) = 2$, $\operatorname{Im}(2-3i) = -3$.

Действия с комплексными числами, заданными в алгебраической форме.

<u>Сложение.</u> Пусть $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$. Тогда $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$.

Пример 1. Пусть $z_1 = 2 - 3i$, $z_2 = 3 + i$. Тогда $z_1 + z_2 = 5 - 2i$.

<u>Умножение (деление) на действительное число.</u> Пусть $z = x + iy$, $k \in R$. Тогда $kz = kx + kyi$.

Пример 2. Пусть $z = -2 + 4i$. Тогда $5z = -10 + 20i$, $\frac{z}{2} = -1 + 2i$.

<u>Умножение.</u> Пусть $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$. Произведение $z_1 z_2$ находится по правилу умножения многочленов $(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)$. Надо помнить, что $i^2 = -1$.

Пример 3. $(2+3i)(5-i) = 2(5-i) + 3i(5-i) =$
$= 10 - 2i + 15i - 3i^2 =$
$= 10 + 13i - 3(-1) =$
$= 10 + 13i + 3 =$
$= 13 + 13i.$

Сопряженное число $\overline{z}$. Пусть $z = x + iy$. Тогда $\overline{z} = x - iy$.

Пример 4. Пусть $z = -2 + 4i$. Тогда $\overline{z} = -2 - 4i$.

Замечание. $z \cdot \overline{z} = (x + iy)(x - iy) =$
$= x^2 - i^2 y^2 = x^2 - (-1) y^2 =$
$= x^2 + y^2.$

Деление. Пусть $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$. Тогда частное $\frac{z_1}{z_2}$ находится по правилу

$$\frac{z_1\overline{z}_2}{z_2\overline{z}_2} = \frac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{(x_2+iy_2)(x_2-iy_2)} = \frac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{x_2^2+y_2^2}.$$

Пример 5. $\frac{2+3i}{5+i} = \frac{(2+3i)(5-i)}{(5+i)(5-i)} = \frac{13+13i}{25+1} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$.

Возведение в степень. С помощью действия над степенями и бинома Ньютона.

Пример 6. $i^3 = i^2 \cdot i = (-1)\cdot i = -i$,

$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)\cdot(-1) = 1$,

$i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i$,

$i^6 = i^4 \cdot i^2 = 1\cdot(-1) = -1 = i^2$,

$z^2 = (x+iy)^2 = x^2 + 2xyi + (iy)^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi$,

$z^3 = (x+iy)^3 = x^3 + 3x^2yi - 3xy^2 - y^3i = (x - 3x^2y) + (3x^2y - y^3)i$.

Упражнение 1. Пусть $z_1 = 2-3i$, $z_2 = 4+i$.

Вычислите: $z_1 + z_2$; $2z_1 - 4z_2$; $z_1 \cdot z_2$; $\overline{z}_1$; $z_1 \cdot \overline{z}_1$; $\frac{z_1}{z_2}$; z_1^2; z_2^3.

Упражнение 2. Пусть $z_1 = -1+3i$, $z_2 = 2-5i$.

Вычислите: $z_1 - z_2$; $z_1 \cdot z_2$; $\frac{z_1}{z_2}$; z_1^2.

Упражнение 3. Вычислите: i^2; i^4; i^5; i^9; i^{12}; i^{23}.

Упражнение 4. Вычислите: $(1+i)^2$; $(1+i)^4$; $(1+i)^2(1-i)^2$.

2. Изображение комплексного числа на плоскости.

Способ 1. Каждое комплексное число $z = x+iy$ можно изобразить точкой $M(x;\ y)$ плоскости *Oxy* такой, что $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$. И, наоборот, каждую точку $M(x;\ y)$ координатной плоскости можно рассматривать как образ комплексного числа $z = x+iy$ (см. рис. 1).

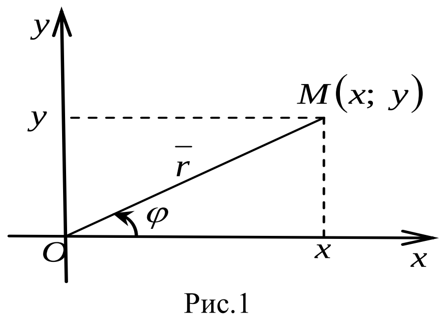


Рис.1

Способ 2. Комплексное число $z = x+iy$ можно задавать с помощью радиус-вектора $\overline{r} = \overline{OM} = (x;\ y)$. Соответствие между комплексным числом и его радиус-вектором также является взаимно-однозначным.

Модуль и аргумент комплексного числа.
Главное значение аргумента.

Длина вектора $\bar{r}$, изображающего комплексное число z, называется ***модулем*** этого числа и обозначается $\operatorname{mod} z$, или $|z|$, или r. Модуль вектора определяет расстояние от начала координат до точки z.

Величина угла между положительным направлением действительной оси и вектором $\bar{r}$, изображающим комплексное число, называется ***аргументом*** этого комплексного числа, обозначается $Arg\, z$.

Аргумент комплексного числа $z = 0$ не определен. Аргумент комплексного числа $z \neq 0$ – величина многозначная и определяется с точностью до слагаемого $2\pi k,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k\ ,$$

где $\arg z$ – ***главное значение аргумента.***

Главное значение аргумента $\arg z$ или φ заключено в промежутке $(-\pi; \pi]$, т. е. $-\pi < \arg z \leq \pi$.

Иногда полагают $\arg z \in [0, 2\pi)$. Ниже будем рассматривать $\arg z \in (-\pi, \pi]$.

Отметим, что сложение (вычитание) и умножение на действительное число комплексных чисел выполняется также, как эти действия выполняются для векторов.

Пример 7. Найдите модуль и главное значение аргумента комплексного числа $z = 3 - 4i$.

$$\operatorname{mod}(3 - 4i) = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = 5.$$

Главное значение аргумента: $tg\varphi = \dfrac{3}{-4} = -\dfrac{3}{4}$, $\varphi \in IV$. Следовательно, $\varphi = arctg\left(-\dfrac{3}{4}\right) = -arctg\dfrac{3}{4}.$

Пример 8. Найдите модуль и аргумент комплексного числа $z = -i$.

$$\operatorname{mod}(-i) = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = \sqrt{0 + 1} = 1.$$

Главное значение аргумента: $tg\varphi = \dfrac{-1}{0}$ не существует, φ находится в нижней полуплоскости. Так как $-\pi < \varphi \leq \pi$, то $\varphi = -\dfrac{\pi}{2}.$

Отметим, что в некоторых случаях найти модуль и аргумент проще графически (см. рис. 2).

Пример 9. Найдем модуль и главное значение аргумента комплексных чисел $z_1 = 3i$, $z_2 = -5i$, $z_3 = 4$, $z_4 = -2 - 2i$.

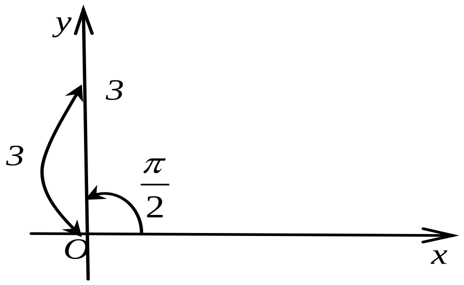


Рис. 2

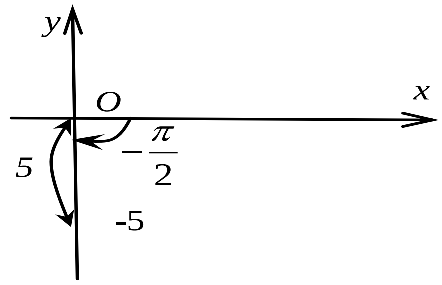


Рис. 3

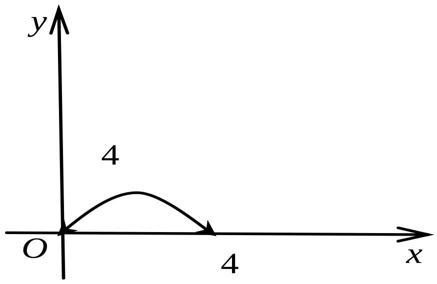


Рис. 4

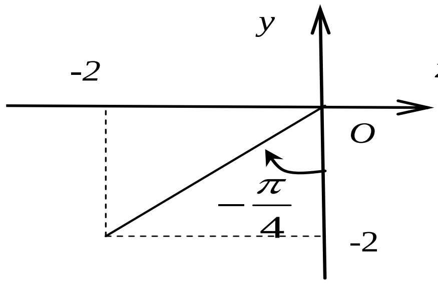


Рис. 5

По рисункам 2 – 5 видно, что $\operatorname{mod} z_1 = 3, \arg z_1 = \frac{\pi}{2}$; $\operatorname{mod} z_2 = 5, \arg z_2 = -\frac{\pi}{2}$;

$\operatorname{mod} z_3 = 4, \arg z_3 = 0$; $\operatorname{mod} z_4 = \sqrt{8}, \arg z_4 = -\frac{\pi}{4}$.

Упражнение 5. Найдите модуль и главное значение аргумента комплексных чисел $z_1 = 1+i;\quad z_2 = -1-i;\quad z_3 = 1-i;\quad z_4 = -1+i.$

Упражнение 6. Найдите модуль и главное значение аргумента комплексных чисел $z_1 = 3;\quad z_2 = -3;\quad z_3 = 3i;\quad z_4 = -3i.$

3. Тригонометрическая форма записи комплексного числа: $z = r(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$.

Алгебраической форме записи комплексного числа $z = x + iy$ соответствуют координаты (x, y) точки z или радиус -вектора этой точки в прямоугольной декартовой системе координат.

Тригонометрической форме записи комплексного числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ соответствуют координаты (r, φ) точки z или радиус -вектора этой точки в полярной системе координат.

Формулы перехода от алгебраической формы записи к тригонометрической форме и обратно соответствуют формулам перехода от прямоугольной декартовой системы координат к полярной системе (см. рис. 1).

Формулы перехода от алгебраической к тригонометрической форме записи:

$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\qquad \varphi = \arg z:\quad tg\varphi = \frac{y}{x}, -\pi < \varphi \le \pi$

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{y}{x} & \text{для внутренних точек I и IV четвертей,} \\ \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \pi & \text{для внутренних точек II четверти,} \\ \operatorname{arctg}\frac{y}{x} - \pi & \text{для внутренних точек III четверти.} \end{cases}$$

Формулы перехода от тригонометрической к алгебраической форме записи:

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos\varphi, \\ y = r \cdot \sin\varphi. \end{cases}$$

4. Показательная форма записи комплексного числа: $z = re^{i\varphi}$.

Показательной форме записи комплексного числа $z = re^{i\varphi}$ соответствуют координаты (r,φ) точки z или радиус -вектора этой точки в полярной системе координат.

Показательная форма записи комплексного числа следует из формулы Эйлера $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$.

Пример 10. Запишем комплексное число $z = 1+i$ в тригонометрической и показательной формах.

$$|z| = r = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}, \quad \varphi = \arg z, \quad \left.\begin{array}{r}\varphi \in I\\ tg\varphi = \dfrac{1}{1}\end{array}\right\} \Rightarrow \varphi = arctg 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Поэтому

$$1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

Пример 11. Запишем комплексное число $z = -1-\sqrt{3}i$ в показательной форме.

$$r = \sqrt{(-1)^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = 2, \quad \varphi = \arg z, \quad \left.\begin{array}{r}\varphi \in III\\ tg\varphi = \dfrac{-\sqrt{3}}{-1}\end{array}\right\} \Rightarrow \varphi = arctg\sqrt{3} - \pi = -\frac{2\pi}{3}.$$

Поэтому

$$-1-\sqrt{3}i = 2\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right) = 2e^{-i\frac{2\pi}{3}}.$$

Пример 12. Запишем комплексное число $z = 2-3i$ в показательной форме.

$$r = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}, \qquad \varphi = \arg z, \quad \left.\begin{array}{r}\varphi \in IV\\ tg\varphi = \dfrac{-3}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow \varphi = arctg\left(-\frac{3}{2}\right) = -arctg\frac{3}{2}.$$

Следовательно, $z = \sqrt{13}e^{-i\, arctg\frac{3}{2}}$.

Пример 13. Запишем комплексное число $z = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$ в алгебраической форме.

$$z = 2e^{i\frac{\pi}{2}} = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 2(0 + i\cdot 1) = 2i.$$

Пример 14. Запишем комплексное число $z = 5e^{i\frac{5\pi}{6}}$ в алгебраической форме.

$$z = 5e^{i\frac{5\pi}{6}} = 5\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = 5\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\cdot\frac{1}{2}\right) = -\frac{5\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2}i.$$

Пример 15. Запишем комплексное число $z = e^{-i\frac{\pi}{12}}$ в алгебраической форме.

$$z = e^{-i\frac{\pi}{12}} = \cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right).$$

Воспользуемся формулами тригонометрии:

$$\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{6}}{2}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}; \quad \sin\left(-\frac{\pi}{12}\right) = -\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{2}} = -\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}.$$

Следовательно,

$$z = e^{-i\frac{\pi}{12}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}} - i\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}.$$

Пример 16. Запишем комплексное число $z = e^{i\frac{4\pi}{5}}$ в алгебраической форме.

$$z = e^{i\frac{4\pi}{5}} = \cos\frac{4\pi}{5} + i\sin\frac{4\pi}{5}.$$

Воспользуемся формулами тригонометрии: $\cos\varphi = \pm\dfrac{1}{\sqrt{1+tg^2\varphi}}$; $\sin\varphi = \pm\dfrac{tg\varphi}{\sqrt{1+tg^2\varphi}}$.

Так как $\dfrac{4\pi}{5} \in II$, то $\cos\varphi < 0,\ \sin\varphi > 0.$ Так как $tg\varphi = tg\dfrac{4\pi}{5} < 0$, то

$\cos\varphi = -\dfrac{1}{\sqrt{1+tg^2\dfrac{4\pi}{5}}}$; $\sin\varphi = -\dfrac{tg\dfrac{4\pi}{5}}{\sqrt{1+tg^2\dfrac{4\pi}{5}}}$. Значит,

$$z - -\frac{1}{\sqrt{1+tg^2\frac{4\pi}{5}}} - \frac{tg\frac{4\pi}{5}}{\sqrt{1+tg^2\frac{4\pi}{5}}}\,i.$$

Упражнение 7. Запишите в показательной форме комплексные числа
$z_1 = 1+i;\quad z_2 = -2;\quad z_3 = 2\left(\sqrt{3}-i\right);\quad z_4 = 5\left(-1+i\sqrt{3}\right).$

Упражнение 8. Запишите в алгебраической форме комплексные числа
$z_1 = 3e^{i\frac{5\pi}{6}};\quad z_2 = 4e^{i\pi};\quad z_3 = 5e^{-i\frac{2\pi}{3}};\quad z_4 = 6e^{-i\frac{\pi}{2}}.$

Действия с комплексными числами, заданными в показательной и тригонометрической форме.

Умножение. Пусть $z_1 = r_1e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2e^{i\varphi_2}$. Тогда $z_1z_2 = r_1e^{i\varphi_1}\cdot r_2e^{i\varphi_2} = r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$.

Пример 17. Найдем произведение чисел $z_1 = 3e^{i\frac{\pi}{6}}$ и $z_2 = 5e^{i\frac{\pi}{3}}$.

$$z_1z_2 = 3e^{i\frac{\pi}{6}}\cdot 5e^{i\frac{\pi}{3}} = 15e^{i\frac{\pi}{2}} = 15\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 15(0+i\cdot 1) = 15i.$$

Пример 18. Найдем произведение чисел $z_1 = 2\left(\cos\dfrac{5\pi}{6} + i\sin\dfrac{5\pi}{6}\right)$ и $z_2 = 6\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right)$.

$$z_1z_2 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)\cdot 6\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = 12\cdot\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{6}\right)\right) =$$

$$= 12\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 12\cdot\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -6 + i\cdot 6\sqrt{3}\ .$$

Пример 19. Найдем произведение чисел $z_1 = 1-i$ и $z_2 = 2\left(3+i\sqrt{3}\right)$.

Запишем числа z_1, z_2 в показательной форме: $z_1 = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$, $z_2 = 4\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$. Поэтому

$z_1\cdot z_2 = 4\sqrt{6}e^{i\frac{\pi}{12}}.$

Деление. Пусть $z_1 = r_1e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2e^{i\varphi_2}$. Тогда $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1e^{i\varphi_1}}{r_2e^{i\varphi_2}} = \dfrac{r_1}{r_{2\,2}}\ e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$.

Пример 20. Найдем частное чисел $z_1 = 3e^{i\frac{\pi}{6}}$ и $z_2 = 5e^{i\frac{\pi}{3}}$.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3}{5}e^{i\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{3}{5}e^{-i\frac{\pi}{6}} = \frac{3}{5}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = \frac{3}{5}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\cdot\frac{1}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{10} - \frac{3}{10}i.$$

Пример 21. Найдем частное чисел $z_1 = 1 - i$ и $z_2 = 2\left(3 + i\sqrt{3}\right)$.

Запишем числа z_1, z_2 в показательной форме: $z_1 = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}, z_2 = 12e^{i\frac{\pi}{6}}$. Поэтому

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{3}}e^{-i\frac{5\pi}{12}} = \frac{\sqrt{6}}{12}e^{-i\frac{5\pi}{12}}.$$

Пример 22. Найдем частное чисел $z_1 = 1 - i\sqrt{3}$ и $z_2 = -\sqrt{3} - i$.

Запишем числа z_1, z_2 в показательной форме: $z_1 = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}, z_2 = 2e^{-i\frac{5\pi}{6}}$. Поэтому

$$\frac{z_1}{z_2} = e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i.$$

<u>Возведение в степень.</u> Пусть $z = re^{i\varphi}$. Тогда $z^n = \left(re^{i\varphi}\right)^n = r^n e^{in\varphi}$, $n = 2,3,4,\ldots$.

Пример 23. Найдем z^3, если $z = 3e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

,

$$z^3 = \left(3e^{-i\frac{\pi}{6}}\right) = 27e^{-i\frac{\pi}{2}} = -27i.$$

Пример 24. Найдем z^{12}, если $z = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$.

,

$$z^{12} = \left(2e^{i\frac{\pi}{4}}\right) = 2^{12}e^{i3\pi} = -2^{12}.$$

Пример 25. Найдем z^5, если $z_2 = -\sqrt{3} + i\sqrt{3}$.

Запишем число z в показательной форме: $z = \sqrt{6}e^{i\frac{3\pi}{4}}$. Поэтому

$$z^5 = \left(\sqrt{6}\right)^5 e^{i\frac{15\pi}{4}} = \sqrt{6^5}\left(\cos\frac{15\pi}{4} + i\sin\frac{15\pi}{4}\right) = \sqrt{6^5}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{\frac{6^5}{2}}\left(1 - i\right).$$

Упражнение 9. Пусть $z_1 = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}, z_2 = 3e^{i\frac{\pi}{6}}$. Найдите: $z_1 \cdot z_2$; $\frac{z_1}{z_2}$; z_1^2; z_1^{15}; $\frac{z_1}{z_2^4}$.

Упражнение 10. Запишите в показательной форме комплексные числа $z_1 = 2 - 2i$; $z_2 = -3i$ и вычислите: $z_1 \cdot z_2$; $\frac{z_1}{z_2}$; z_2^3; z_1^{16}.

Упражнение 11. Вычислите $\left(2 - 2i\right)^7$; $\left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i}\right)^{40}$; $\left(\frac{1 - i}{1 + i}\right)^8$.

5. Корень из комплексного числа.

Пусть $z = re^{i\varphi}$. Найдем $\sqrt[n]{z}$, $n = 2,3,4,\ldots$. Положим $\sqrt[n]{z} = w = \rho e^{i\psi}$. Тогда $z = w^n = \rho^n e^{in\psi}$, поэтому $\rho^n = r$, $n\psi = \varphi + 2\pi l, l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Следовательно, $\rho = \operatorname{mod}\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}$,

$\psi = \arg \sqrt[n]{z} = \dfrac{\varphi + 2\pi k}{n}$, $k = 0,1,\ldots,n-1$. Получим n различных значений корня. При других значениях k, в силу периодичности косинуса и синуса, получатся значения корня, совпадающие с уже найденными.

Итак, $\operatorname{mod} \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}, \quad \arg \sqrt[n]{z} = \dfrac{\varphi + 2\pi k}{n}, k = 0,1,\ldots,n-1.$

Получаем формулу: $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\varphi+2\pi k}{n}}, k = 0,1,\ldots,n-1.$

Пример 26. Пусть $z = re^{i\varphi}$. Запишем значения $\sqrt[n]{z}$ при различных значениях n.

Пусть $n = 2$. Тогда $\sqrt{z} = \sqrt{r} e^{i\frac{\varphi+2\pi k}{2}}, k = 0,1$, т.е. $\sqrt{z}$ принимает два различных значения: $\left(\sqrt{z}\right)_1 = \sqrt{r} e^{i\frac{\varphi}{2}}$, $\left(\sqrt{z}\right)_2 = \sqrt{r} e^{\frac{\varphi+2\pi}{2}}$.

Пусть $n = 3$. Тогда $\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{r} e^{i\frac{\varphi+2\pi k}{3}}, k = 0,1,2$, т.е. $\sqrt[3]{z}$ принимает три различных значения: $\left(\sqrt[3]{z}\right)_1 = \sqrt[3]{r} e^{i\frac{\varphi}{3}}$, $\left(\sqrt[3]{z}\right)_2 = \sqrt[3]{r} e^{\frac{\varphi+2\pi}{3}}$, $\left(\sqrt[3]{z}\right)_3 = \sqrt[3]{r} e^{\frac{\varphi+4\pi}{3}}$.

Пусть $n = 4$. Тогда $\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{r} e^{i\frac{\varphi+2\pi k}{4}}, k = 0,1,2,3$, т.е. $\sqrt[4]{z}$ принимает четыре различных значения: $\left(\sqrt[4]{z}\right)_1 = \sqrt[4]{r} e^{i\frac{\varphi}{4}}$, $\left(\sqrt[4]{z}\right)_2 = \sqrt[4]{r} e^{\frac{\varphi+2\pi}{4}}$, $\left(\sqrt[4]{z}\right)_3 = \sqrt[4]{r} e^{\frac{\varphi+4\pi}{4}}$, $\left(\sqrt[4]{z}\right)_4 = \sqrt[4]{r} e^{\frac{\varphi+6\pi}{4}}$.

Для произвольного значения n: $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\varphi+2\pi k}{n}}, k = 0,1,\ldots,n-1.$

Пример 27. Найдем значения $\sqrt{-1-\sqrt{3}i}$.

Запишем подкоренное выражение в показательной форме: $-1-\sqrt{3}i = 2e^{-i\frac{2\pi}{3}}$.

Полагая в формуле для вычисления корня из комплексного числа $n = 2$, $r = 2$, $\varphi = -\dfrac{2\pi}{3}$, имеем

$$\sqrt{\left(-1-\sqrt{3}i\right)} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{-\frac{2\pi}{3}+2\pi k}{2} + i\sin\frac{-\frac{2\pi}{3}+2\pi k}{2}\right), \quad k = 0,1$$

При $k = 0$ получаем $\left(\sqrt{-1-\sqrt{3}i}\right)_1 = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right) = \sqrt{2}\left(\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right);$

при $k = 1$ получаем $\left(\sqrt{-1-\sqrt{3}i}\right)_2 = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right) = \sqrt{2}\left(-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right).$

Пример 28. Пусть $z = -16$. Найдем значения $\sqrt[4]{z}$. Запишем число $z = -16$ в показательной форме: $-16 = 16e^{i\pi}$ Тогда $\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{16} e^{i\frac{\pi+2\pi k}{4}}, k = 0,1,2,3$. Значит,

$$\left(\sqrt[4]{z}\right)_1 = 2e^{i\frac{\pi}{4}} = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(1+i\right),$$

$$\left(\sqrt[4]{z}\right)_2 = 2e^{\frac{\pi+2\pi}{4}} = 2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(-1+i\right),$$

$$\left(\sqrt[4]{z}\right)_3 = 2e^{\frac{\pi+4\pi}{4}} = 2\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\,(-1-i),$$

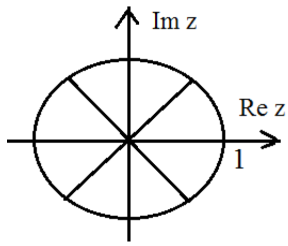
$$\left(\sqrt[4]{z}\right)_4 = 2e^{\frac{\pi+6\pi}{4}} = 2\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\,(1-i).$$

Геометрическая иллюстрация.

Все n значений $\sqrt[n]{z}$ имеют одинаковое значение модуля: $\operatorname{mod}\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}$. Значит, все значения $\sqrt[n]{z}$ расположены на одинаковом расстоянии от начала координат. Таким образом, $\sqrt[n]{z}$ расположены на окружности с центром в начале координат радиуса $\sqrt[n]{r}$.

Угол между двумя соседними значениями равен $\dfrac{2\pi}{n}$. Таким образом, значения $\sqrt[n]{z}$ делят окружность на n равных частей.

Изобразим на чертеже значения $\sqrt[8]{1}$. Это 8 различных значений, расположенных на окружности единичного радиуса, которые делят эту окружность на 8 равных частей. Одно из таких значений равно1, так как $1^8 = 1$.
По чертежу видно, что



$$\left(\sqrt[8]{1}\right)_1 = 1; \quad \left(\sqrt[8]{1}\right)_2 = e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i); \quad \left(\sqrt[8]{1}\right)_3 = e^{i\frac{\pi}{2}} = i; \quad \left(\sqrt[8]{1}\right)_4 = e^{i\frac{3\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i);$$

$$\left(\sqrt[8]{1}\right)_5 = e^{i\pi} = -1; \quad \left(\sqrt[8]{1}\right)_6 = e^{i\frac{5\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i); \quad \left(\sqrt[8]{1}\right)_7 = e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i; \quad \left(\sqrt[8]{1}\right)_8 = e^{i\frac{7\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i).$$

Упражнение 12. Найдите все значения $\sqrt[3]{27i}$; $\sqrt[4]{81}$; $\sqrt[6]{-64}$. Результат запишите в алгебраической форме. Изобразите найденные значения на чертеже.

Упражнение 13. Найдите все значения $\sqrt[3]{-1+i}$; $\sqrt[4]{i}$; $\sqrt{1-i\sqrt{3}}$. Изобразите найденные значения на чертеже.

Практическое занятие 2.

Тема: Преобразование Лапласа и его свойства. Нахождение изображений.

Цель: Научить находить изображения кусочно-линейной функции, тригонометрических функций.

1. Определение преобразования Лапласа.
2. Изображение некоторых элементарных функций.
3. Свойство линейности.
4. Теорема подобия.
5. Теорема смещения изображения.
6. Теорема смещения оригинала. Изображение кусочно-линейной функции.

Замечание. Часть занятия, связанная с нахождением изображений кусочно-линейной функции, предназначена для самостоятельной работы студентов в аудитории.

Конспект занятия.

Упражнение. Найдите изображения функций

$x_1(t)=2+3\sin t-4\cos t, \quad x_2(t)=3e^{5t}-4e^{-7t}, \quad x_3(t)=2sh\,t-3ch\,t+4,$
$x_4(t)=3t+\sin 2t-5\cos 4t, \quad x_5(t)=4-t+5e^{3t}-5\cos 7t, \quad x_6(t)=2sh3t+\sin 3t,$
$x_7(t)=e^{-2t}\sin 3t+5e^{4t}\cos 3t.$

Задание 1. График функции $f_1(t)$ приведен на рисунке 1. Запишите аналитическое представление функции-оригинала $f(t)$ и найдите ее изображение $F(p)$.

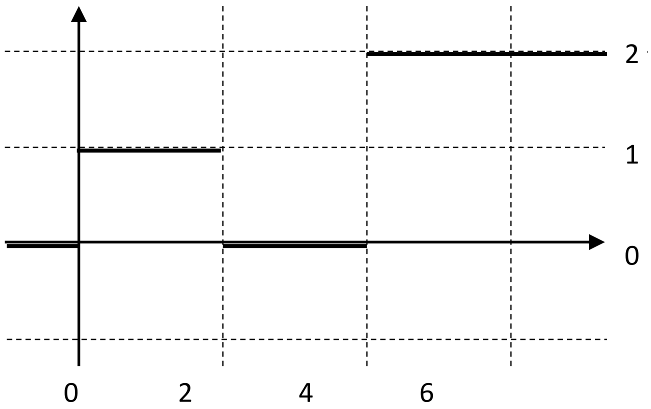


Рис. 1

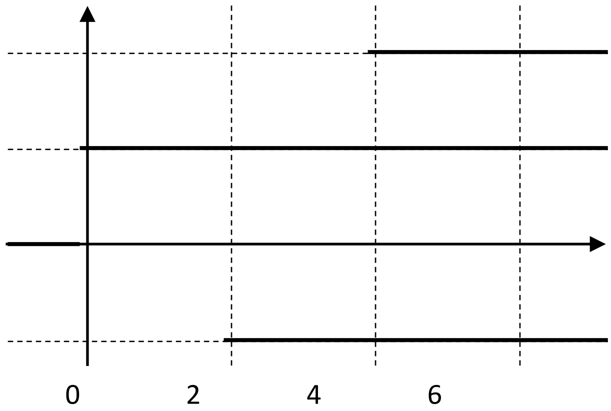


Рис. 2

Решение. При $t\in[0;2)$: $f(t)=1 \quad \risingdotseq \quad F(p)=\dfrac{1}{p}$;

при $t\in[2;4)$: $f(t)=1-1=0 \quad \risingdotseq \quad F(p)=\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{p}e^{-2p}$;

при $t\in[4;+\infty)$: $f(t)=0+2=2 \quad \risingdotseq \quad F(p)=\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{p}e^{-2p}+\dfrac{2}{p}e^{-4p}$.

Отметим, что функция-оригинал $f(t)$ представляет собой сумму функций, изображенных на рисунке 2.

Ответ. $F_1(p)=\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{p}e^{-2p}+\dfrac{2}{p}e^{-4p}$.

Если оригинал $f(t)$ является кусочно-постоянной функцией и в точках τ_k имеет скачки $f(\tau_k+0)-f(\tau_k-0)=\gamma_k$, то изображение $F(p)$ имеет вид $F(p)=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{\gamma_k}{p}e^{-\tau_k p}$.

Задание 2. По рисункам 3-6 запишите аналитическое представление функций-оригиналов $f_3(t)-f_6(t)$ и найдите их изображения $F_3(p)-F_6(p)$. Сторону клетки считать равной 1.

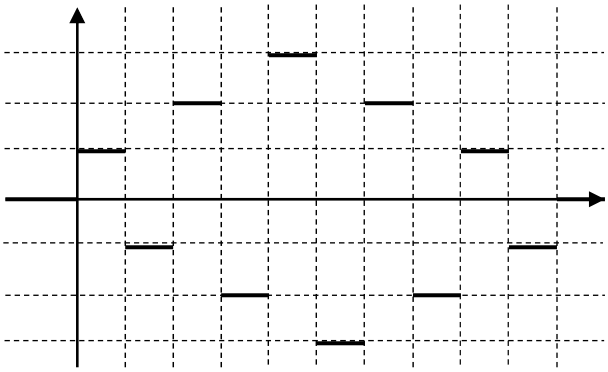


Рис.3

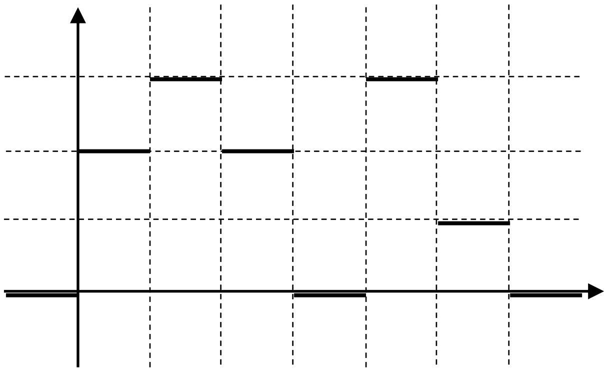


Рис. 4

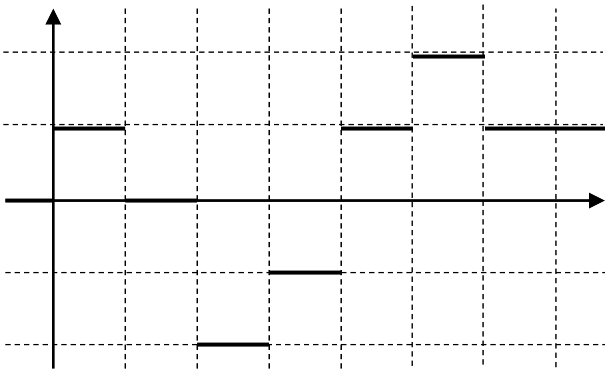


Рис. 5

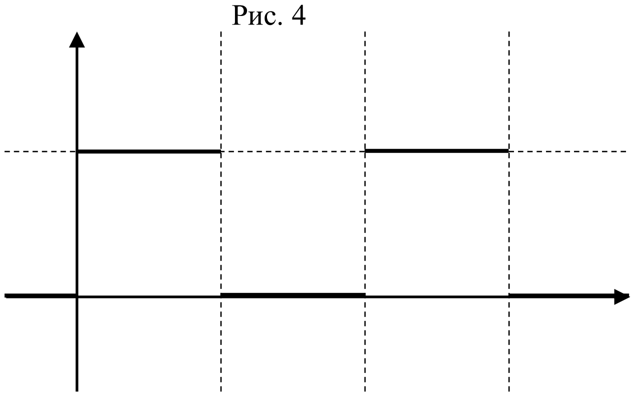


Рис. 6

2. Изображение непрерывной кусочно-линейной функции.

На рисунках 7 и 8 изображены графики линейной функции-оригинала $f(t) = at + b$.

Угловой коэффициент $a = tg\alpha$. Угол α отсчитывается от положительного направления оси абсцисс. На рисунках угол α отмечен стрелочками. Направление против часовой стрелки (рис. 7) является положительным, по часовой стрелке (рис. 8) – отрицательным. Тангенс угла α может быть найден из прямоугольных треугольников как отношение противолежащего катета к прилежащему. На рисунке 7 $tg\alpha = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$. На рисунке 8 $tg\alpha = -\frac{4}{9}$.

Начальная ордината b – это ордината точки пересечения графика и оси ординат. На рисунках 7 и 8 $b = 2$.

Таким образом, на рисунке 7 изображен график функции $f_7(t) = \frac{1}{3}t + 2$, на рисунке 8 – график функции $f_8(t) = -\frac{4}{9}t + 2$.

Таким образом, на рисунке 7 изображен график функции $f_7(t) = \frac{1}{3}t + 2$, на рисунке 8 – график функции $f_8(t) = -\frac{4}{9}t + 2$.

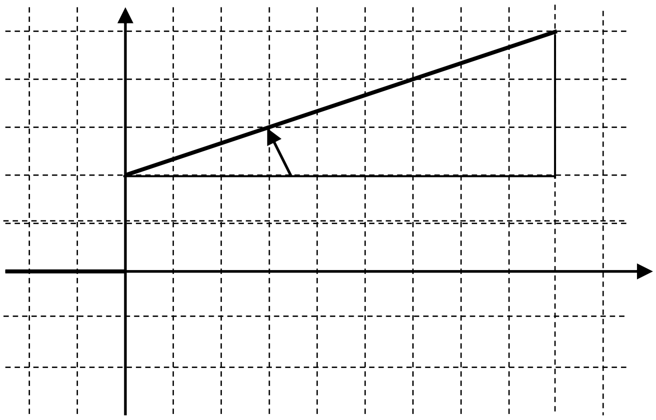


Рис. 7

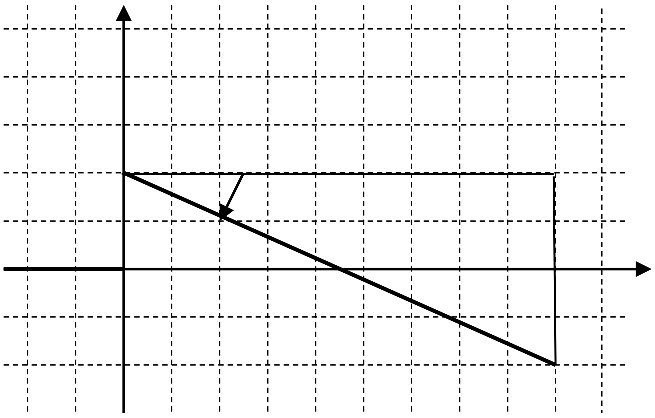


Рис. 8

Задание 3. Найдите изображение функции $f_9(t)$, график которой приведен на рисунке 9.

Решение. Функция $f_9(t)$, отлична от нуля при $t \geq 2$. Если мы перейдем к новой переменной $t_1 = t - 2$, то мы получим график функции $f_9(t_1) = \frac{3}{8}t_1 + 1$, приведенный на рисунке 10. Изображение $F(p)$ функции $f_9(t_1)$ имеет вид $F(p) = \frac{3}{8}\frac{1}{p^2} + \frac{1}{p}$.

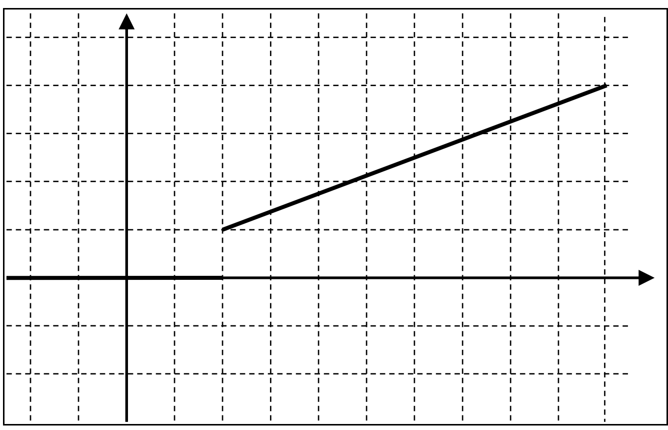


Рис. 9

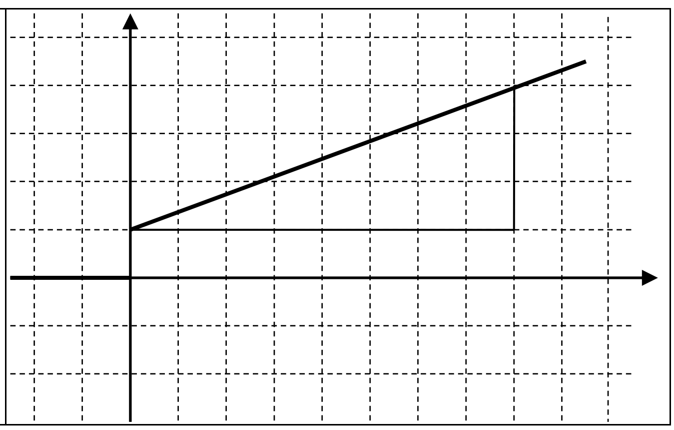


Рис. 10

Задание 4. Найдите изображения функций, графики которых приведены на рисунках 11 и 12.

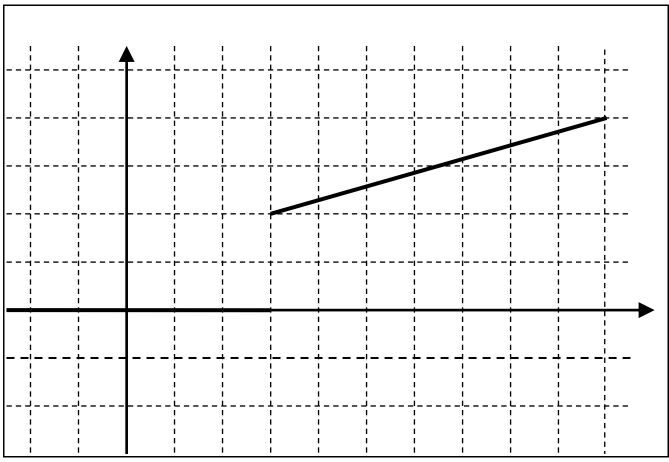


Рис. 11

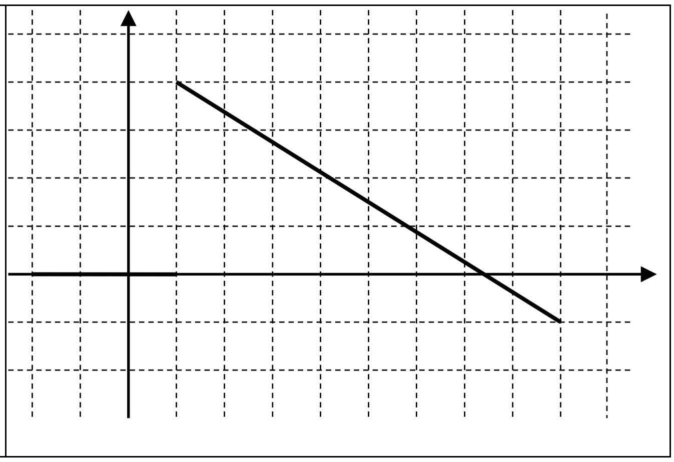


Рис. 12

Задание 5. Найдите изображение функции, приведенной на рисунке 13.

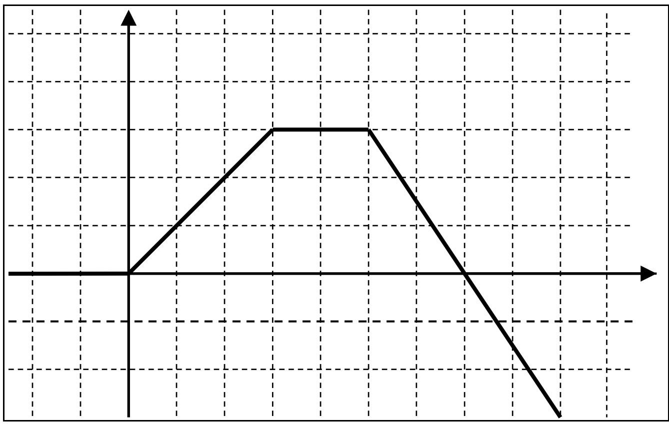


Рис. 13

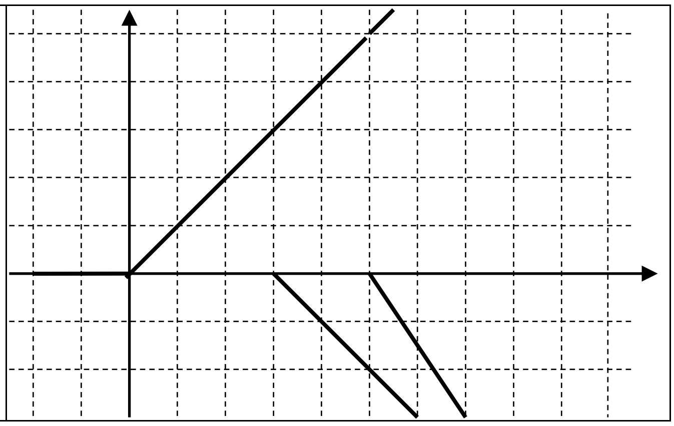


Рис. 14

Решение. При $t \in [0;3)$: $f(t) = t \quad \risingdotseq \quad F(p) = \dfrac{1}{p^2}$.

При $t \in [3;5)$: $f(t) = t + f_1(t-3)$, $f_1(t-3) = -t \quad \risingdotseq \quad F(p) = \dfrac{1}{p^2} - \dfrac{1}{p^2}e^{-3p}$.

При $t \geq 5$: $f(t) = t + f_1(t-3) + f_2(t-5)$, $f_2(t-5) = -\dfrac{3}{2}t \quad \risingdotseq$

$$F(p) = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2}e^{-3p} - \frac{3}{2p^2}e^{-5p}.$$

Отметим, что функция $f_{13}(t)$ является суммой функций, приведенных на рисунке 14.

Ответ: $F_{13}(p) = \dfrac{1}{p^2} - \dfrac{1}{p^2}e^{-3p} - \dfrac{3}{2p^2}e^{-5p}$.

Если оригинал $f(t)$ является непрерывной кусочно-линейной функцией и в точках τ_k имеет скачки производной $f'(\tau_k + 0) - f'(\tau_k - 0) = \delta_k$, то изображение $F(p)$ имеет вид $F(p) = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{\delta_k}{p^2} e^{-\tau_k p}$.

Задание 6. Найдите изображения $F_{15}(p) - F_{18}(p)$ функций, графики которых приведены на рисунках 15-18.

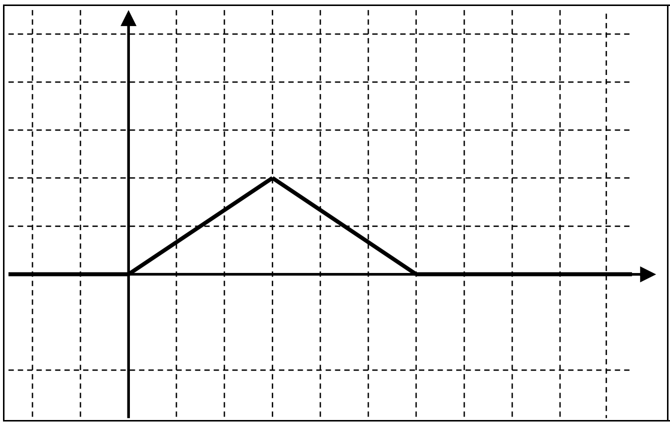


Рис. 15

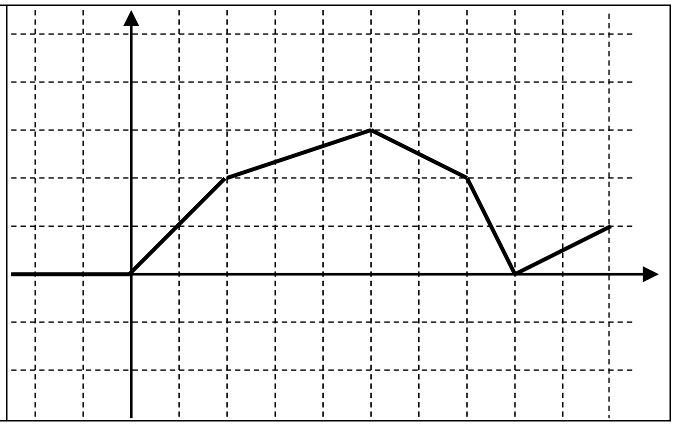


Рис. 16

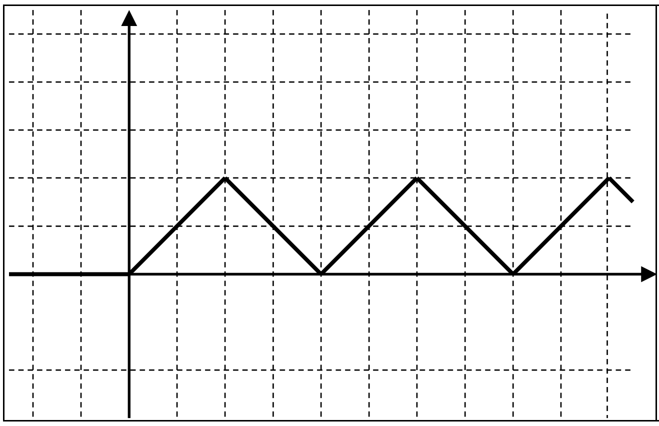


Рис. 17

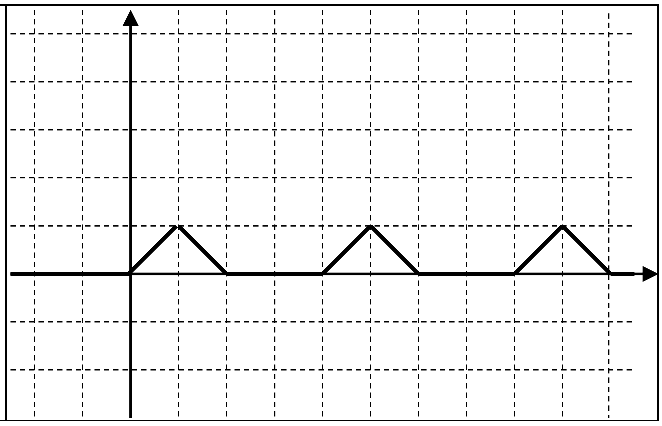


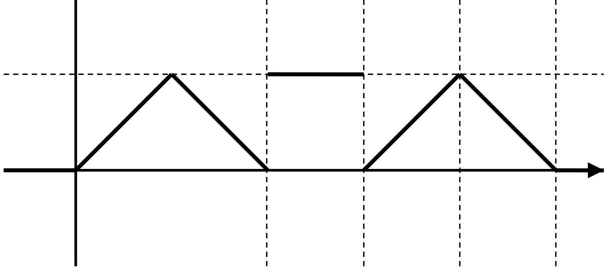
Рис. 18

3. Изображение кусочно-линейной функции.

Если оригинал $f(t)$ является кусочно-линейной функцией и в точках τ_k имеет скачки функции $f(\tau_k+0)-f(\tau_k-0)=\gamma_k$ и скачки производной $f'(\tau_k+0)-f'(\tau_k-0)=\delta_k$, то изображение $F(p)$ имеет вид

$$F(p)=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{\gamma_k}{p}+\frac{\delta_k}{p^2}\right)e^{-\tau_k p}.$$

Задание 7. Найдите изображения $F_{19}(p)-F_{22}(p)$ функций, графики которых приведены на рисунках 19-22.



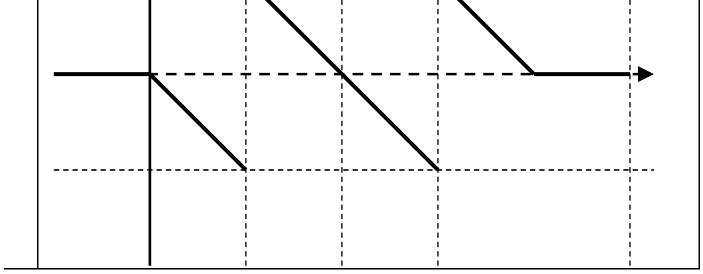


Рис. 19 Рис. 20

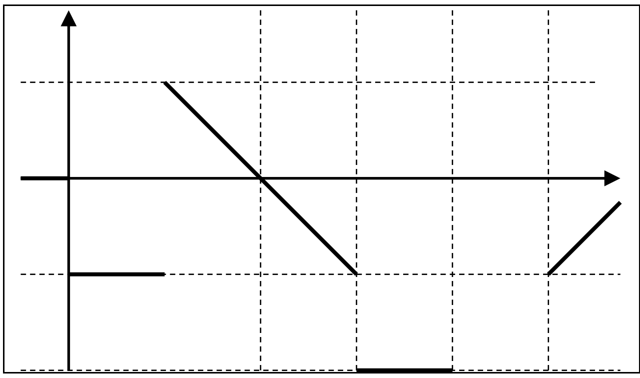


Рис. 20

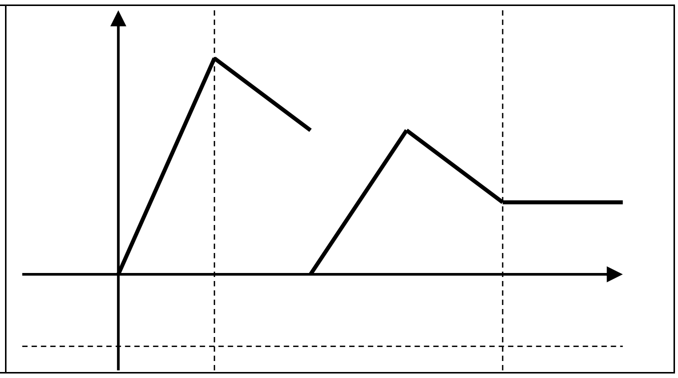


Рис. 21

Ответы.

$$F_3(p)=\frac{1}{p}-\frac{2}{p}e^{-p}+\frac{3}{p}e^{-2p}-\frac{4}{p}e^{-3p}+\frac{5}{p}e^{-4p}-\frac{6}{p}e^{-5p}+\frac{5}{p}e^{-6p}-\frac{4}{p}e^{-7p}+\frac{3}{p}e^{-8p}-\frac{2}{p}e^{-9p}+\frac{1}{p}e^{-10p}.$$

$$F_4(p)=\frac{2}{p}+\frac{1}{p}e^{-p}-\frac{1}{p}e^{-2p}-\frac{2}{p}e^{-3p}+\frac{3}{p}e^{-4p}-\frac{2}{p}e^{-5p}-\frac{1}{p}e^{-6p}.\qquad F_5(p)=\frac{1}{p}-\frac{1}{p}e^{-p}-\frac{2}{p}e^{-2p}+$$

$$+\frac{1}{p}e^{-3p}+\frac{2}{p}e^{-4p}+\frac{1}{p}e^{-5p}-\frac{1}{p}e^{-6p}.$$

$$F_6(p)=\frac{1}{p}+-\frac{1}{p}e^{-p}+\frac{1}{p}e^{-2p}-\frac{1}{p}e^{-3p}+\ldots=\frac{1}{p}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^n e^{-np}=$$

$$=\frac{1}{p}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-e^{-p}\right)^n\frac{1}{p\left(1+e^{-p}\right)};\ F_{11}(p)=\left(\frac{2}{7}\frac{1}{p^2}+\frac{2}{p}\right)e^{-3p};\ F_{12}(p)=\left(-\frac{3}{5}\frac{1}{p^2}+\frac{4}{p}\right)e^{-p};$$

$$F_{15}(p)=\frac{2}{3p^2}-\frac{4}{3p^2}e^{-3p}+\frac{2}{3p^2}e^{-6p};\ F_{16}(p)=\frac{1}{p^2}-\frac{2}{3p^2}e^{-2p}-\frac{5}{6p^2}e^{-5p}-\frac{3}{2p^2}e^{-7p}+\frac{5}{2p^2}e^{-8p};$$

$$F_{17}(p)=\frac{1}{p^2}-\frac{2}{p^2}e^{-2p}+\frac{2}{p^2}e^{-4p}-\frac{2}{p^2}e^{-6p}+\frac{2}{p^2}e^{-8p}-\frac{2}{p^2}e^{-10p}+\ldots=\frac{1-e^{-2p}}{p^2\left(1+e^{-2p}\right)};$$

$$F_{18}(p)=\frac{\left(1-e^{-p}\right)^2}{p^2\left(1-e^{-4p}\right)}.$$

$$F_{19}(p)=\frac{1}{p^2}-\frac{2}{p^2}e^{-p}+\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}\right)e^{-2p}+\left(-\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}\right)e^{-3p}-\frac{2}{p^2}e^{-4p}+\frac{1}{p^2}e^{-5p};$$

$$F_{20}(p)=-\frac{1}{p^2}+\frac{2}{p}e^{-p}+\frac{2}{p}e^{-3p}+\frac{1}{p^2}e^{-4p};$$

$$F_{21}(p)=-\frac{1}{p}+\left(\frac{2}{p}-\frac{1}{p^2}\right)e^{-p}+\left(-\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}\right)\frac{2}{p}e^{-3p}+\frac{1}{p^2}e^{-4p};$$

$$F_{22}(p)=\frac{3}{p^2}-\frac{4}{p^2}e^{-p}+\left(-\frac{2}{p}+\frac{3}{p^2}\right)e^{-2p}-\frac{3}{p^2}e^{-3p}+\frac{1}{p^2}e^{-4p}.$$

Задания для самостоятельных работ

Самостоятельная работа 1

Тема: Комбинационные схемы.

Цель: Знакомство с анализом комбинационных схем.

Задание самостоятельной работы. На вход логической схемы поступает десятичное число А, равное номеру вашего варианта. Переведите его в двоичную систему. Запишите в виде пятизначного двоичного числа, дополнив, если это необходимо, отсутствующие разряды слева нулями. Найдите двоичное число В – сигнал на выходе. Запишите число В в десятичной системе счисления.

Пример 1.

Логическая схема преобразует входной пятизначный двоичный код A в выходной шестизначный двоичный код B. Пусть на вход преобразователя поступил код $A=6$, представленный в десятичной системе. Переведем его в двоичную систему: $6|_{10} = 110|_2$. В коде 110 три знака, а на вход должны подаваться пятизначные двоичные числа. Поэтому код 110 необходимо удлинить добавлением слева от него двух нулей: $6|_{10} = 00110|_2$. Отсюда получаем: $a=0$, $b=0$, $c=1$, $d=1$, $e=0$.

Переходим к схеме преобразователя. Все элементы на схеме пронумерованы: от 1 до 13 – операции И, от 14 до 19 – операции ИЛИ.

Так как $a=0$, то операция И с номером 2 заперта, то есть на ее выходе поддерживается низкий уровень напряжения. Поэтому на второй вход операции 14 (при счете сверху вниз) подан логический нуль. Также с выхода операции 2 на вход операции 12 подается низкий уровень, эта операция И заперта и на первый вход операции 15 подан логический нуль. Кроме того, запертой является операция И с номером 8, вследствие чего на втором входе операции 17 поддерживается низкий уровень напряжения. Запертой является и операция 13, значит, на первом входе операции 18 напряжение равно нулю.

Рассмотрим последствия условия $b=0$. Запертыми являются операции 3, 6 и 11. На третьем входе операции 14, на втором входе операции 16 и на втором входе операции 19 – низкие уровни. Операция 7 открыта, то есть на ее выходе поддерживается высокий уровень напряжения (так как $a=b=0$). Этот уровень подается на третий вход операции 16, на первый вход операции 17 и на второй вход операции 18. Следовательно, получаем $f_3 = f_4 = f_5 = 1$. В дальнейшем операции 16, 17 и 18 можно не рассматривать, поскольку их состояние уже полностью определено.

Значение аргумента c равно единице. Запертыми являются операции И под номерами 1 и 5. Отсюда $f_1 = 0$ (на всех трех входах операции 14 – низкие уровни). Кроме того, низкий уровень с выхода операции 1 поступает на первый вход операции 19. Так как на обоих входах этой операции низкие уровни, то $f_6 = 0$.

Следующий аргумент d. Так как $d=1$, то запертой является операция И с номером 4. С ее выхода на второй вход операции 15 подается низкий уровень, вследствие чего $f_2 = 0$.

Значение $e=0$ на состояние выходов никакого влияния не оказывает, так как выходы всех операций ИЛИ определены на основе значений аргументов a, b, c, d. В результате получаем $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $f_3 = 1$, $f_4 = 1$, $f_5 = 1$, $f_6 = 0$.

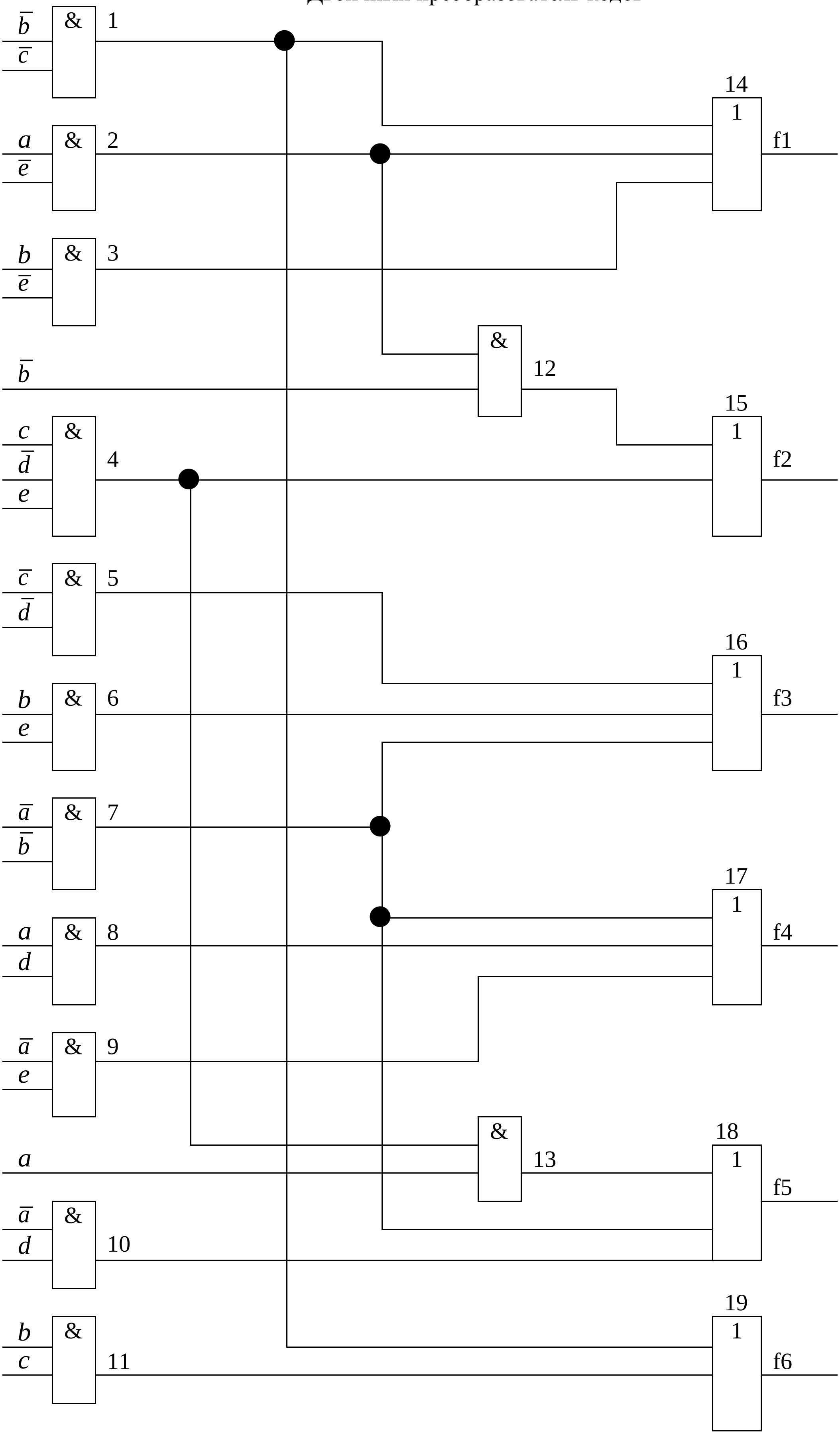
Таким образом, выходным является шестизначный двоичный код 001110. Представим его в десятичной системе: $001110|_2 = 14|_{10}$.

Пример 2.

На вход того же преобразователя подан код $A = 29|_{10}$. Найдите соответствующий ему выходной код B и представьте его также в десятичной системе.

Ответ: $B = 27\big|_{10}$.

Двоичный преобразователь кодов



Самостоятельная работа 2

Тема: Комбинационные схемы.
Цель: Синтез комбинационных схем.
Задание самостоятельной работы.
1. С помощью функциональных элементов НЕ, И, ИЛИ постройте сумматор Σ, позволяющий складывать два однозначных двоичных числа.
2. С помощью функциональных элементов НЕ, И, ИЛИ и сумматора Σ постройте сумматор $\Sigma 2$, позволяющий складывать два двузначных двоичных числа.
3. С помощью функциональных элементов НЕ, И, ИЛИ, сумматоров Σ и $\Sigma 2$ постройте сумматор $\Sigma 3$, позволяющий складывать два трехзначных двоичных числа.